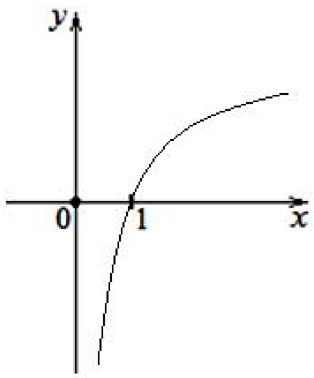
Статья №14. Логарифмические уравнения.

Теоретический материал.

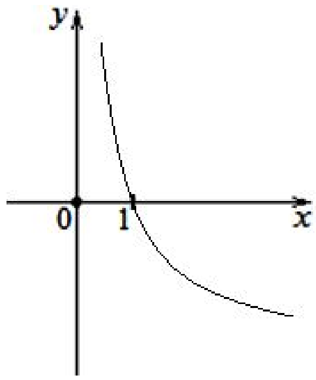
Логарифмической функцией $y(x)$ называется функция вида $y(x)=\log_a x$, где $a>0$ и $a\neq 1$. Её областью определения является множество действительных чисел $(x\in\mathbb{R})$, а множеством значений — множество положительных действительных чисел $(y\in\mathbb{R}_+)$.

Показательная и логарифмическая функции при одном и том же основании являются взаимно обратными функциями.

Графики логарифмических функций при различных значениях a:



$\boxed{y=\log_a x,\ a>1}$



$\boxed{y=\log_a x,\ 0<a<1}$

Свойства логарифмических функций:

1. При $a>1$ функция $y(x)=\log_a x$ – строго монотонно возрастающая на $\mathbb{R}_+$. При $0<a<1$ функция $y(x)=\log_a x$ – строго монотонно убывающая на $\mathbb{R}_+$.
2. График функции $y(x)=\log_a x$ проходит через точку с координатами $(1;0)$.

Простейшее логарифмическое уравнение – это уравнение вида $\log_a x=b\ \ (a>0,\ a\neq 1)$. Это уравнение имеет единственный корень $x=a^b$ для любого $b\in\mathbb{R}$.
Логарифмическое уравнение – это уравнение вида $\log_a f(x)=b\ \ (a>0,\ a\neq 1)$.

При решении логарифмических уравнений часто используются логарифмирование и потенцирование.

Логарифмирование по основанию $a\ \ (a>0,\ a\neq 1)$ – это переход от уравнения $f(x)=g(x)$ к уравнению $\log_a f(x)=\log_a g(x)$. При логарифмировании область допустимых значений уравнения сужается.

Потенцирование по основанию $a\ \ (a>0,\ a\neq 1)$ – это переход от уравнения $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ к уравнению $f(x)=g(x)$. При потенцировании область допустимых значений уравнения расширяется.

Свойства логарифмических уравнений:

1. Для любых $a>0$, $a\neq 1$ справедливо: $\boxed{\log_a f(x)=\log_a g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=g(x),\\ f(x)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=g(x),\\ g(x)>0.\end{cases}}$

2. Для любых $a>0$, $a\neq 1$, $g(x)\in\mathbb{R}$ справедливо: $\boxed{\log_a f(x)=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)=a^{g(x)},\\ f(x)>0.\end{cases}}$

Равносильность в приведённых свойствах объясняется строгой монотонностью логарифмической функции (каждое своё значение функция принимает только один раз).

Иногда можно встретить сложные уравнения вида $\log_{h(x)} f(x)=\log_{h(x)} g(x)$ и $\log_{h(x)} f(x)=g(x)$, где $\left(h(x)>0,\ h(x)\neq 1\right)$. Эти уравнения сводятся к логарифмическим потенцированием по основанию $h(x)$. Важные свойства таких уравнений:

1. Для любых $h(x)>0$, $h(x)\neq 1$ справедливо: $\boxed{\log_{h(x)} f(x)=\log_{h(x)} g(x)\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)=g(x),\\ f(x)>0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)=g(x),\\ g(x)>0.\end{cases}}$

2. Для любых $h(x)>0$, $h(x)\neq 1, g(x)\in\mathbb{R}$ справедливо: $\boxed{\log_{h(x)} f(x)=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)=a(x)^{g(x)},\\ f(x)>0.\end{cases}}$

Решение сложных логарифмических уравнений равносильными переходами часто бывает громоздким. В таких случаях можно сначала найти всевозможные корни уравнения, определить область допустимых значений (далее – ОДЗ) уравнения, и затем проверить корни на принадлежность ОДЗ.

Отметим, что иногда нахождение ОДЗ уравнения представляет собой трудную задачу. Тогда бывает удобно находить все корни, а затем, подставляя их в исходное уравнение, отбрасывать те, которые являются посторонними.

Примеры решения задач.

Простейшие логарифмические уравнения встречаются повсеместно и довольно часто.

Пример 1.

Решить уравнение $\log_3\left(x^2+2x-2\right)=0$.

Решение:

$$\log_3\left(x^2+2x-2\right)=0\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} x^2+2x-2=1,\\ x^2+2x-2>0\end{cases}\ \Leftrightarrow\ x^2+2x-3=0\ \Leftrightarrow\ \boxed{\left[\begin{array}{l} x=1,\\ x=-3.\end{array}\right.}$$

Ответ: $x=1$, $x=-3$.

Пример 2.

Решить уравнение $3x^2+5^{\log_5 x}=16^{\log_4\sqrt{30}}$.

Решение:

Заметим, что $5^{\log_5 x}=x$ и $16^{\log_4\sqrt{30}}=30$.

Тогда $3x^2+5^{\log_5 x}=16^{\log_4\sqrt{30}}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} 3x^2+x=30,\\ x>0\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{10}{3},\\ x=3,\end{array}\right.\\ x>0.\end{cases}$ В ОДЗ входит только $\boxed{x=3}$.

Ответ: $x=3$.

Пример 3. [МФТИ 1996]

Решить уравнение $\log_{25}(x-2)^2+\dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{5}}\left(\dfrac{2x+9}{18-x}\right)=0$.

Решение:

$\log_{25}(x-2)^2+\frac{1}{2}\log_{\sqrt{5}}\left(\frac{2x+9}{18-x}\right)=0 \Leftrightarrow \log_5|x-2|+\log_5\left(\frac{2x+9}{18-x}\right)=\log_5 1$. Обратите внимание на то, что под первым логарифмом должен стоять знак модуля, поскольку $\log_{25}(x-2)^2=2\log_{25}|x-2|$. Заметим, что исходное уравнение равносильно уравнению $\log_5\left(|x-2|\cdot\frac{2x+9}{18-x}\right)=\log_5 1$. Тогда:

$$\log_5\left(|x-2|\cdot\frac{2x+9}{18-x}\right)=\log_5 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 2,\\ (x-2)(2x+9)=18-x,\end{cases}\\ \begin{cases}x<2,\\ (2-x)(2x+9)=18-x\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 2,\\ x^2+3x-18=0,\end{cases}\\ \begin{cases}x<2,\\ x^2+2x=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \boxed{\left[\begin{array}{l}x=3,\\ x=0,\\ x=-2.\end{array}\right.}$$

Ответ: $x=3$, $x=0$, $x=-2$.

Некоторые уравнения упрощаются с помощью логарифмирования. Рассмотрим такое уравнение.

Пример 4. [ВМК 1996]

Решить уравнение $x^{\lg x}=100x$.

Примечание: десятичным логарифмом $\lg x$ называют $\log_{10} x$.

Решение:

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 10.

Тогда $x^{\lg x}=100x \Leftrightarrow \lg x^{\lg x}=\lg 100x \Leftrightarrow \lg x\cdot\lg x=\lg x+\lg 100$. Пусть $\lg x=t$, тогда $\lg x\cdot\lg x=\lg x+\lg 100$ $\Leftrightarrow t^2-t-2=0 \Leftrightarrow \boxed{\left[\begin{array}{l}t=-1,\\ t=2.\end{array}\right.}$

Рассмотрим два случая:

1) $\boxed{t=-1} \Rightarrow \lg x=-1 \Leftrightarrow \boxed{x=\frac{1}{10}}$.

2) $\boxed{t=2} \Rightarrow \lg x=2 \Leftrightarrow \boxed{x=100}$.

Ответ: $x=\frac{1}{10}$, $x=100$.

В основном будут встречаться сложные логарифмические уравнения.

Пример 5.

Решить уравнение $\log_{x+5}\left(\sqrt{1-2x+x^2}-4\right)=\frac{1}{2}$.

Решение:

Запишем ОДЗ: $\boxed{\begin{cases}x+5>0,\\ x+5\ne 1,\\ \sqrt{1-2x+x^2}-4>0,\\ x^2-2x+1\ge 0.\end{cases}}$ Заметим, что $\frac{1}{2}$ можно представить как $\log_{x+5}\sqrt{x+5}$.

Тогда исходное уравнение примет вид: $\log_{x+5}\left(\sqrt{1-2x+x^2}-4\right)=\log_{x+5}\sqrt{x+5}$, откуда $\sqrt{1-2x+x^2}-4=\sqrt{x+5}$ $\Leftrightarrow |x-1|-4=\sqrt{x+5} \Leftrightarrow \boxed{|x-1|=\sqrt{x+5}+4}$.

Если $x\ge 1$, то $x-5=\sqrt{x+5} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 5,\\ x^2-11x+20=0.\end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x=\frac{11+\sqrt{41}}{2}}$.

Если $x<1$, то $-x-3=\sqrt{x+5} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -3, \\ x^2+5x+4=0. \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x=-4}$.

Решение $x=-4$ не удовлетворяет ОДЗ, значит, является посторонним. Решение $x=\dfrac{11+\sqrt{41}}{2}$ ОДЗ удовлетворяет.

Ответ: $x=\dfrac{11+\sqrt{41}}{2}$.

Часто можно встретить логарифмические уравнения, которые можно свести к квадратным с помощью замены переменной.

Пример 6. [МФТИ 2008]

Решить уравнение $\log_{\left(-x-\frac{2}{3}\right)}\left(-x^3-\dfrac{2}{3}\right)+\log_{\left(\sqrt[3]{-x^3-\frac{2}{3}}\right)}\left(-x-\dfrac{2}{3}\right)=4$.

Решение:

Запишем ОДЗ уравнения: $\boxed{-x-\dfrac{2}{3}>0}$, $\boxed{-x-\dfrac{2}{3}\ne 1}$, $\boxed{-x^3-\dfrac{2}{3}>0}$, $\boxed{\sqrt[3]{-x^3-\dfrac{2}{3}}\ne 1}$. Приведём логарифмы к одному основанию: $\log_{\left(-x-\frac{2}{3}\right)}\left(-x^3-\dfrac{2}{3}\right)+\log_{\left(\sqrt[3]{-x^3-\frac{2}{3}}\right)}\left(-x-\dfrac{2}{3}\right)=4 \Leftrightarrow \log_{\left(-x-\frac{2}{3}\right)}\left(-x^3-\dfrac{2}{3}\right)+\dfrac{3}{\log_{\left(-x-\frac{2}{3}\right)}\left(-x^3-\frac{2}{3}\right)}=4$.

Пусть $\boxed{t=\log_{\left(-x-\frac{2}{3}\right)}\left(-x^3-\dfrac{2}{3}\right)}$. Тогда уравнение сведётся к квадратному относительно переменной t: $t+\dfrac{3}{t}=4 \Leftrightarrow$ $\begin{cases} t^2-4t+3=0, \\ t\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\left[\begin{array}{l} t=1, \\ t=3. \end{array}\right.}$. Рассмотрим два случая:

1) Пусть $\boxed{t=1}$, тогда $1=\log_{\left(-x-\frac{2}{3}\right)}\left(-x^3-\dfrac{2}{3}\right) \Leftrightarrow -x^3-\dfrac{2}{3}=-x-\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow x^3-x=0 \Leftrightarrow \boxed{\left[\begin{array}{l} x=1. \\ x=-1, \\ x=0. \end{array}\right.}$

Из полученных корней в ОДЗ входит только $\boxed{x=-1}$.

2) Пусть $\boxed{t=3}$, тогда $3=\log_{\left(-x-\frac{2}{3}\right)}\left(-x^3-\dfrac{2}{3}\right) \Leftrightarrow -x^3-\dfrac{2}{3}=\left(-x-\dfrac{2}{3}\right)^3 \Leftrightarrow 2x^2+\dfrac{4}{3}x-\dfrac{10}{27}=0 \Leftrightarrow \boxed{x=-\dfrac{1}{3}\pm\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{8}{3}}}$.

Из полученных корней в ОДЗ входит только $\boxed{x=-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{8}{3}}}$.

Ответ: $x=-1$, $x=-\dfrac{1}{3}\left(1+\sqrt{\dfrac{8}{3}}\right)$.

Пример 7.

Решить уравнение $5^{\lg x}-3^{\lg x}=5\dfrac{1}{3}\cdot 3^{0,5\lg x}\cdot 5^{0,5(\lg x-2)}$.

Решение:

Заметим, что $5^{0,5(\lg x-2)}=5^{0,5\lg x-1}=\dfrac{5^{0,5\lg x}}{5}$. Пусть $\boxed{3^{0,5\lg x}=t}$ и $\boxed{5^{0,5\lg x}=p}$. Тогда $5^{\lg x}-3^{\lg x}=5\dfrac{1}{3}\cdot 3^{0,5\lg x}\cdot 5^{0,5(\lg x-2)} \Leftrightarrow$

$p^2-t^2=\dfrac{16}{3}\cdot t\cdot\dfrac{p}{5} \Leftrightarrow 15p^2-16pt-15t^2=0 \Leftrightarrow \boxed{\left[\begin{array}{l} p=\dfrac{5}{3}t, \\ p=-\dfrac{3}{5}t. \end{array}\right.}$. Рассмотрим два случая:

1) $\boxed{p=\frac{5}{3}t} \Leftrightarrow \frac{p}{5}=\frac{t}{3} \Leftrightarrow 5^{0,5\lg x-1}=3^{0,5\lg x-1} \Leftrightarrow 0,5\lg x-1=0 \Leftrightarrow \boxed{x=100}$.

2) $\boxed{p=-\frac{3}{5}t} \Leftrightarrow 5p=-3t \Leftrightarrow 5^{0,5\lg x+1}=-3^{0,5\lg x+1}$. По свойствам показательной функции левая часть уравнения принимает только положительные значения, а правая – только отрицательные, следовательно, данное уравнение не имеет решений.

Ответ: $x=100$.

Иногда встречаются смешанные задачи. Например, логарифмическое уравнение с элементами тригонометрии. Почти все такие задачи решаются заменой переменной.

Пример 8.

Решить уравнение $9\log_{\sin 2x}\left(4\cos^2 x\right)+8\log_{2\cos x}\left(\sin x\right)=16$.

Решение:

Запишем ОДЗ уравнения: $\boxed{\sin x>0}$, $\boxed{\cos x>0}$, $\boxed{\sin 2x\neq 1}$, $\boxed{\cos x\neq \frac{1}{2}}$. Так как $\cos x>0$, то $9\log_{\sin 2x}\left(4\cos^2 x\right) \Leftrightarrow$ $18\log_{\sin 2x}\left(2\cos x\right) \Leftrightarrow 18\cdot\frac{1}{\log_{2\cos x}\left(\sin 2x\right)} \Leftrightarrow \frac{18}{\log_{2\cos x}\left(2\sin x\cos x\right)} \Leftrightarrow \frac{18}{\log_{2\cos x}\left(\sin x\right)+\log_{2\cos x}\left(2\cos x\right)} \Leftrightarrow$ $\boxed{\frac{18}{\log_{2\cos x}\left(\sin x\right)+1}}$. Пусть $\boxed{\log_{2\cos x}\left(\sin x\right)=t}$, тогда $9\log_{\sin 2x}\left(4\cos^2 x\right)+8\log_{2\cos x}\left(\sin x\right)=16 \Leftrightarrow \frac{18}{t+1}+8t=16$ $\Leftrightarrow \begin{cases} t\neq -1, \\ 4t^2-4t+1=0. \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{t=\frac{1}{2}}$. Получим уравнение $\log_{2\cos x}\left(\sin x\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x=\sqrt{2\cos x}$. Так как $\sin x>0$ и $\cos x>0$, то $\sin x=\sqrt{2\cos x} \Leftrightarrow \sin^2 x=2\cos x \Leftrightarrow 1-\cos^2 x=2\cos x$. Пусть $\boxed{\cos x=p}$, тогда получим квадратное уравнение относительно p: $1-\cos^2 x=2\cos x \Leftrightarrow p^2+2p-1=0 \Leftrightarrow \boxed{\left[\begin{array}{l} p=-1+\sqrt{2}, \\ p=-1-\sqrt{2}. \end{array}\right.}$. Так как по ОДЗ $\cos x>0$, то исходное уравнение имеет смысл при $\boxed{p=-1+\sqrt{2}}$. Тогда: $\cos x=-1+\sqrt{2} \Leftrightarrow$ $\boxed{x=\arccos\left(-1+\sqrt{2}\right)+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}}$.

Ответ: $x=\arccos\left(-1+\sqrt{2}\right)+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Рассмотрим пример системы логарифмических уравнений.

Пример 9. [МФТИ 1998]

Решить систему уравнений $\begin{cases} \log_3\left(\frac{x^2}{y}+x\right)+\log_{1/3}\left(\frac{y^2}{x}+y\right)=2, \\ \log_2\left|x+y\right|=1. \end{cases}$

Решение:

Запишем ОДЗ первого уравнения системы: $\boxed{\frac{x\left(x+y\right)}{y}>0}$, $\boxed{\frac{y\left(x+y\right)}{x}>0}$. Приведём логарифмы к одному основанию в первом уравнении: $\log_3\left(\frac{x^2}{y}+x\right)+\log_{1/3}\left(\frac{y^2}{x}+y\right)=2 \Leftrightarrow \log_3\left(\frac{x^2}{y}+x\right)-\log_3\left(\frac{y^2}{x}+y\right)=\log_3 9 \Leftrightarrow$

$$\frac{\frac{x^2}{y}+x}{\frac{y^2}{x}+y}=9 \Leftrightarrow \frac{(x^2+xy)\cdot x}{(y^2+xy)\cdot y}=9 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2=9$$

. Тогда исходная система равносильна системе $\boxed{\begin{cases}\left(\dfrac{x}{y}\right)^2=9,\\ \log_2|x+y|=1\end{cases}} \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{x}{y}=3,\\ x+y=2,\end{cases}\\ \begin{cases}\dfrac{x}{y}=-3,\\ x+y=-2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=3y,\\ x+y=2y,\end{cases}\\ \begin{cases}x=-3y,\\ x+y=-2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \boxed{\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{2},\ y=\dfrac{1}{2},\\ x=-3,\ y=1.\end{array}\right.}$$

Ответ: $\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$, $(-3;1)$.

Домашнее задание.

Задача 1. Найти все положительные корни уравнения $\log_{16}(x-4)^2=\log_4 2x$.

Задача 2. Решить уравнение $x^{\lg 2x}=5$.

Задача 3. Решить уравнение $\log_x 2\cdot\log_{\frac{x}{16}}2=\log_{\frac{x}{64}}2$.

Задача 4. [МФТИ 2008] Решить уравнение $\log_{\left(\frac{1}{4}-x\right)^3}\left(\frac{1}{4}-x^3\right)+\log_{\left(\frac{1}{4}-x^3\right)}\left(\frac{1}{4}-x\right)=\frac{4}{3}$.

Задача 5. [МФТИ 1996] Решить уравнение $\log_9(x-4)^2+\frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{2x+5}{20-x}\right)=0$.

Задача 6. При каких значениях x числа $\log_3(2x^2-x)$, $\log_3(10-x^2+12x)$, $\log_3\left(x^2+11x+9\frac{1}{2}\right)$ являются длинами сторон некоторого равнобедренного треугольника.

Задача 7. [МФТИ 1998] Решить систему уравнений $\begin{cases}\log_2\left(x^2y+\dfrac{xy^2}{2}\right)-\log_{1/2}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}\right)=3,\\ \log_{1/5}\left|\dfrac{xy}{6}\right|=0.\end{cases}$

11 февраля 2010 г.

Межвузовский центр воспитания и развития талантливой молодежи в области естественно-математических наук "Физтех-центр"

Составители: Пенкин М.А., Шувалов Н.Д., Беляков О.Е.

E-mail: abitu@phystech.edu, fmicky@gmail.com

Сайт: www.abitu.ru