

Статья №9. Тригонометрические уравнения.

Теоретический материал.

Напомним формулы приведения:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \cos x$$

$$\sin(\pi \pm x) = \mp \sin x$$

$$\cos(\pi \pm x) = -\cos x$$

Напомним основные тригонометрические формулы, применяемые при решении задач:

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cdot \cos b \pm \cos a \cdot \sin b$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \sin a \cdot \sin b$$

$$\operatorname{tg}(a \pm b) = \frac{\operatorname{tga} + \operatorname{tgb}}{1 - \operatorname{tga} \cdot \operatorname{tgb}}$$

$$\operatorname{ctga} = \frac{1}{\operatorname{tga}}$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$$

$$\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\operatorname{tga} + \operatorname{tgb} = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cdot \cos b}$$

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$$

$$\sin a \cdot \sin b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$$

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}$$

Другие идеи, применяемые при решении задач:

- Универсальная тригонометрическая подстановка, т.е. замена $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. В этом случае:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

- Метод дополнительного угла: $a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin \left(x + \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \right)$.

- Формулы для суммы синусов и косинусов:

$$\sin \varphi + \dots + \sin n\varphi = \frac{\sin \frac{n\varphi}{2} \cdot \sin \frac{(n+1)\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}},$$

$$\cos \varphi + \dots + \cos n\varphi = \frac{\sin \frac{n\varphi}{2} \cdot \cos \frac{(n+1)\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}}.$$

Примеры решения задач.

1. Решить уравнение $\sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}} + 2x^2 = 1$.

Решение:

По области определения данного уравнения $x \in [-1; 1]$. Это значит, что для каждого x , при котором определено уравнение, существует число $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$: $x = \sin \alpha$. Поэтому правомерно сделать замену $x = \sin \alpha$. Подобный приём называется тригонометрической заменой.

Получим уравнение $\sqrt{\frac{1+2\sin \alpha \sqrt{1-\sin^2 \alpha}}{2}} + 2\sin^2 \alpha = 1$.

По основному тригонометрическому тождеству получаем: $\sqrt{\frac{1+2\sin \alpha |\cos \alpha|}{2}} + 2\sin^2 \alpha = 1$.

Так как $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то $\cos \alpha \geq 0$, значит, $|\cos \alpha| = \cos \alpha$. Получаем: $\sqrt{\frac{1+\sin 2\alpha}{2}} + 2\sin^2 \alpha = 1$.

Отсюда: $\sqrt{\frac{1+\sin 2\alpha}{2}} = 1 - 2\sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$.

Получаем:
$$\begin{cases} \cos 2\alpha \geq 0, \\ 1 + \sin 2\alpha = 2\cos^2 2\alpha. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 2\alpha \geq 0, \\ \sin 2\alpha = 1 - 2\sin^2 2\alpha. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 2\alpha \geq 0, \\ 2\sin^2 2\alpha + \sin 2\alpha - 1 = 0. \end{cases}$$

Отсюда: $\sin 2\alpha = \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$.

Учитывая то, что $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, получаем, что $\alpha = \left\{-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{12}\right\}$, значит, $x_1 = \sin \alpha_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \sin \alpha_2 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

Ответ: $x = \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right\}$.

2. Решить уравнение $\frac{4\cos^2 2x \cos 4x + 3\cos 2x + \cos 6x}{\cos 3x} = 0$.

Решение:

$\cos 6x = 4\cos^3 2x - 3\cos 2x$, значит, $\frac{4\cos^2 2x \cos 4x + 4\cos^3 2x}{\cos 3x} = 0$.

$$\frac{4\cos^2 2x(\cos 4x + \cos 2x)}{\cos 3x} = 0,$$

$$\frac{\cos^2 2x(2\cos^2 2x + \cos 2x - 1)}{\cos 3x} = 0,$$

$$\frac{\cos^2 2x(\cos 2x + 1)\left(\cos 2x - \frac{1}{2}\right)}{\cos 3x} = 0.$$

Это равносильно системе $\begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cos 2x = -1 \\ \cos 2x = \frac{1}{2} \\ \cos 3x \neq 0 \end{cases}$.

Получаем, что $\begin{cases} 2x = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ 2x = \pi + 2\pi n \\ 2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n \\ \cos 3x \neq 0 \end{cases}$, то есть $\begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi n \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n \\ \cos 3x \neq 0 \end{cases}$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Если $x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi n$, то $3x = \pm \frac{3\pi}{4} + 3\pi n$. В этом случае: $\cos 3x \neq 0$.

Если $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, то $3x = \frac{3\pi}{2} + 3\pi n$. В этом случае: $\cos 3x = 0$ при всех $n \in \mathbb{Z}$.

Если $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n$, то $3x = \pm \frac{\pi}{2} + 3\pi n$. В этом случае: $\cos 3x = 0$ при всех $n \in \mathbb{Z}$. Значит, $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n$.

Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

3. Решить уравнение $\frac{2 \sin 3x}{|\sin x|} = \frac{\cos 6x}{\cos 2x}$.

Решение:

Заметим, что по области определения данного уравнения: $\begin{cases} \cos 2x \neq 0, \\ \sin x \neq 0. \end{cases}$

1) Рассмотрим случай, когда $\sin x > 0$.

Тогда на области определения: $2(3 - 4 \sin^2 x) = 4 \cos^2 2x - 3$.

Получаем: $2 + 4 \cos 2x = 4 \cos^2 2x - 3$,

$4 \cos^2 2x - 4 \cos 2x - 5 = 0$,

$$\cos 2x = \frac{1 \pm \sqrt{6}}{2}.$$

С учётом того, что $|\cos 2x| \leq 1$, получаем, что $\cos 2x = \frac{1 - \sqrt{6}}{2}$.

$$1 - 2 \sin^2 x = \frac{1 - \sqrt{6}}{2},$$

$$\sin^2 x = \frac{1 + \sqrt{6}}{4},$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{6}}}{2}.$$

Отсюда получаем, что: $\begin{cases} x = \arcsin\left(\frac{\sqrt{1 + \sqrt{6}}}{2}\right) + 2\pi n \\ x = \pi - \arcsin\left(\frac{\sqrt{1 + \sqrt{6}}}{2}\right) + 2\pi n \end{cases}$, где $n \in \mathbb{Z}$.

2) Рассмотрим случай, когда $\sin x < 0$.

Тогда на области определения: $2(4 \sin^2 x - 3) = 4 \cos^2 2x - 3$.

Отсюда получаем, что: $-2 - 4 \cos 2x = 4 \cos^2 2x - 3$.

$4 \cos^2 2x + 4 \cos 2x - 1 = 0$,

$$\cos 2x = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}.$$

С учётом того, что $|\cos 2x| \leq 1$ получаем, что: $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

$$1 - 2\sin^2 x = \frac{\sqrt{2}-1}{2},$$

$$\sin^2 x = \frac{3-\sqrt{2}}{4},$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3-\sqrt{2}}}{2}.$$

Отсюда получаем, что
$$\begin{cases} x = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3-\sqrt{2}}}{2}\right) + 2\pi n \\ x = \pi - \arcsin\left(\frac{\sqrt{3-\sqrt{2}}}{2}\right) + 2\pi n \end{cases}, \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \arcsin\left(\frac{\sqrt{1+\sqrt{6}}}{2}\right) + 2\pi n, x = \pi - \arcsin\left(\frac{\sqrt{1+\sqrt{6}}}{2}\right) + 2\pi n, x = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3-\sqrt{2}}}{2}\right) + 2\pi n,$

$$x = \pi - \arcsin\left(\frac{\sqrt{3-\sqrt{2}}}{2}\right) + 2\pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

4. Решить уравнение $(3\sin x + 4\cos x)(20 + 12\sin x + 5\cos 2x) = 143$.

Решение:

1) $3\sin x + 4\cos x = 5\sin\left(x + \arctg\frac{4}{3}\right)$, значит, максимальное значение выражения равно 5, и оно достигается

при $\sin\left(x + \arctg\frac{4}{3}\right) = 1$.

2) $20 + 12\sin x + 5\cos 2x = 20 + 12\sin x + 5(1 - 2\sin^2 x) = 25 + 12\sin x - 10\sin^2 x$. Максимальное значение этого выражения достигается при $\sin x = \frac{3}{5}$, и оно равно $25 + 12 \cdot \frac{3}{5} - 10 \cdot \frac{9}{25} = \frac{143}{5}$.

3) Таким образом, произведение $(3\sin x + 4\cos x)(20 + 12\sin x + 5\cos 2x)$ не превосходит 143. Оно может быть равно 143 тогда и только тогда, когда оба множителя достигают своих максимальных значений, то есть:

$$\begin{cases} \sin\left(x + \arctg\frac{4}{3}\right) = 1 \\ \sin x = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем, что $x + \arctg\frac{4}{3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Так как $\arctg\frac{4}{3} = \arccos\frac{3}{5}$, то

$$x = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{3}{5} + 2\pi n = \arcsin\frac{3}{5} + 2\pi n.$$

То же самое получается из второго уравнения этой системы: $x = \arcsin\frac{3}{5} + 2\pi n$.

Значит, решение системы: $x = \arcsin \frac{3}{5} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \arcsin \frac{3}{5} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Домашнее задание.

1. Решить уравнение $5^{\operatorname{ctg}^2 x} \cdot \left(26 - 5^{\frac{1}{\sin^2 x}}\right) = 5$.

2. Найти все значения параметра α , при которых квадратичная функция $x^2 \cdot \cos \alpha + 2x \cdot \sin \alpha + \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{2} = 0$ является квадратом линейной функции.

3. Решить уравнение $\cos \pi \sqrt{x} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. Решить уравнение $\frac{\sin x \cdot \sin 2x}{\cos x \cdot \cos 3x} - \frac{\sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{5x}{2}}{\cos 2x \cdot \cos 3x} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{3x}{2}}{\cos x \cdot \cos 2x} - \frac{1 + 2\sqrt{2}}{2 \cos 2x}$.

4 ноября 2009 г.

Межвузовский центр воспитания и развития
талантливой молодежи в области
естественно-математических наук
"Физтех-центр"

Составители: Пенкин М.А., Шимко О.В., Шувалов Н.Д.

E-mail: abitu@phystech.edu, fmicky@gmail.com

Сайт: www.abitu.ru