

ФИЗИКА

Статья №9. Модель идеального газа.

Теоретический материал.

В этой статье мы рассмотрим элементы молекулярно-кинетической теории (далее – МКТ).

Напомним основные формулы, которые вводятся в МКТ при рассмотрении веществ.

1.  $\nu = \frac{N}{N_A}$ , где  $\nu$  – количество вещества (размерность – моль),  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$  – **постоянная Авогадро**,

$N$  – количество молекул в веществе (безразмерная величина).

Моль любого вещества содержит одно и то же число молекул. Это число – постоянная Авогадро.

2.  $\mu = m_0 \cdot N_A$ , где  $\mu$  – молярная масса вещества (размерность –  $\frac{\text{кг}}{\text{моль}}$ ).

Для определения молярной массы обычно используют таблицу периодической системы элементов Д. И. Менделеева. Например, для углерода (С) 12 а.е.м. соответствует молярной массе  $\mu = 12 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$ .

3.  $N = \frac{m}{m_0}$ , где  $m$  – масса вещества,  $m_0$  – масса одной молекулы. 4.  $\nu = \frac{m}{\mu}$ .

Чаще всего в задачах веществом будет газ.

**Идеальный газ** – газ, для которого взаимодействием и размерами молекул можно пренебречь.

Основным уравнением, описывающим поведение идеального газа, является **уравнение Менделеева-Клапейрона** (уравнение состояния идеального газа):

$$p \cdot V = \nu \cdot R \cdot T,$$

где  $p$  – давление газа,  $V$  – объём, занимаемый газом,  $\nu$  – количество моль газа,  $T$  – абсолютная температура газа (размерность –  $K$ ),  $R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot K}$  – **универсальная газовая постоянная**.

Очень часто в задачах мы будем считать данный нам газ идеальным.

Напомним основные формулы, справедливые для идеального газа.

1.  $\bar{E} = \frac{3}{2} kT$ , где  $k = \frac{R}{N_A} = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{K}$  – **постоянная Больцмана**,  $\bar{E}$  – средняя кинетическая энергия

поступательного движения одной молекулы газа.

2.  $p = nkT$ , где  $n = \frac{N}{V}$  – концентрация газа.

3.  $u = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}$ , где  $u$  – средняя квадратичная скорость теплового движения молекул газа.

4.  $\rho = \frac{p\mu}{RT}$ , где  $\rho$  – плотность газа.

Часто над идеальным газом будут проводить различные процессы.

Процессы, протекающие при постоянном количестве  $\nu$  газа и неизменном значении одного из параметров (давления  $p$ , объёма  $V$  или температуры  $T$ ), называют **изопроцессами**. Виды таких процессов:

1. **Изотермический процесс** ( $T = const$  и  $\nu = const$ ).
2. **Изохорный (изохорический) процесс** ( $V = const$  и  $\nu = const$ ).
3. **Изобарный (изобарический) процесс** ( $p = const$  и  $\nu = const$ ).

Для изотермического процесса справедлив **закон Бойля-Мариотта**:  $pV = const$ . Для изохорного процесса справедлив **закон Шарля**:  $\frac{p}{T} = const$ . Для изобарного процесса справедлив **закон Гей-Люссака**:  $\frac{V}{T} = const$ .

При описании процессов часто приходится иметь дело не только с одним газом, а со смесью  $N$  газов.

**Закон Дальтона** утверждает о том, что давление смеси газов, химически не взаимодействующих между собой, равно сумме давлений (парциальных давлений) каждого из компонентов смеси:

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_N.$$

При этом парциальное давление каждой из компонент смеси подчиняется уравнению Менделеева-Клапейрона:

$$p_1 V = \nu_1 R T, \quad p_2 V = \nu_2 R T, \quad \dots, \quad p_N V = \nu_N R T,$$

где  $V$  – объём смеси,  $T$  – её температура.

Рассмотрим несколько примеров решения задач.

#### Примеры решения задач.

##### Пример 1.

Сосуд разделён подвижным поршнем на объёмы  $V/3$  и  $2V/3$ , содержащие идеальный газ температуры  $T$  (рис.1). До какой температуры  $T_1$  нужно нагреть газ слева от поршня, чтобы отношение объёмов стало обратным? Справа температура газа поддерживается постоянной.

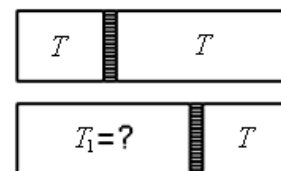


рис.1

##### Решение:

Пусть  $\nu_1$  – количество газа в сосуде слева от поршня,  $\nu_2$  – количество газа в сосуде справа от поршня.

Уравнения состояния для газа слева и справа до нагревания:  $p_1 \cdot \frac{V}{3} = \nu_1 \cdot R \cdot T$ ,  $p_1 \cdot \frac{2V}{3} = \nu_2 \cdot R \cdot T$ , откуда

получаем, что  $\nu_2 = 2\nu_1$ . Уравнения состояния для газа слева и справа после нагревания:  $p_2 \cdot \frac{2V}{3} = \nu_1 \cdot R \cdot T_1$ ,

$p_2 \cdot \frac{V}{3} = \nu_2 \cdot R \cdot T$ , откуда получаем, что  $T_1 = 4T$ .

Ответ:  $T_1 = 4T$ .

##### Пример 2. [Пенкин М.А.]

В результате изобарического расширения  $\nu = 4$  моль идеального газа средняя квадратичная скорость молекул этого газа увеличилась на 2% от первоначального значения скорости. Насколько расширился газ? Первоначально газ находился при температуре  $T = 27^\circ C$  и нормальном атмосферном давлении.

Указание:  $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$  при малых значениях  $x$ .

**Решение:**

Дано:  $T = 300 \text{ K}$ ,  $p = 10^5 \text{ Па}$ , количество газа  $\nu = 4 \text{ моль}$ , первоначальная среднеквадратичная скорость

$$u = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}. \text{ Изменение среднеквадратичной скорости: } \Delta u = \sqrt{\frac{3R(T + \Delta T)}{\mu}} - \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = u \cdot \left( \sqrt{1 + \frac{\Delta T}{T}} - 1 \right).$$

Поскольку  $\frac{\Delta u}{u} = 0,02$  мало, то и  $\frac{\Delta T}{T}$  тоже мало, значит,  $\Delta u = u \cdot \frac{\Delta T}{2T}$  (1). Из уравнения состояния идеального

газа следует, что  $p\Delta V = \nu R\Delta T$ , откуда  $\Delta V = \frac{\nu R\Delta T}{p}$  (2). Из уравнений (1) и (2) получаем, что

$$\Delta V = \frac{2\nu RT}{p} \cdot \frac{\Delta u}{u} = 4 \text{ л}.$$

**Ответ:**  $\Delta V = \frac{2\nu RT}{p} \cdot \frac{\Delta u}{u} = 4 \text{ л}.$

**Пример 3.**

Найти среднюю молярную массу  $\mu_{\text{ср}}$  смеси газов с молярными массами  $\mu_1 = 4 \text{ г/моль}$  и  $\mu_2 = 16 \text{ г/моль}$ . Масса первого газа в два раза больше массы второго.

**Решение:**

Для газа с молярной массой  $\mu_1 = 4 \text{ г/моль}$ :  $p_1 \cdot V = \frac{m_1}{\mu_1} RT$ . Для газа с молярной массой  $\mu_2 = 16 \text{ г/моль}$ :

$p_2 \cdot V = \frac{m_2}{\mu_2} RT$ . Для смеси этих газов:  $p_{\text{смеси}} \cdot V = \frac{m_1 + m_2}{\mu_{\text{ср}}} RT$ . По закону Дальтона  $p_{\text{смеси}} = p_1 + p_2$ , значит,

$$(p_1 + p_2) \cdot V = \frac{m_1 + m_2}{\mu_{\text{ср}}} RT. \text{ Левую часть уравнения преобразуем: } (p_1 + p_2) \cdot V = p_1 \cdot V + p_2 \cdot V = \frac{m_1}{\mu_1} RT + \frac{m_2}{\mu_2} RT.$$

Значит,  $\frac{m_1}{\mu_1} RT + \frac{m_2}{\mu_2} RT = \frac{m_1 + m_2}{\mu_{\text{ср}}} RT$ , следовательно,  $\mu_{\text{ср}} = \frac{m_1 + m_2}{\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}}$ . По условию  $\frac{m_1}{m_2} = 2$ , значит,  $m_1 = 2m_2$ .

$$\text{Следовательно, } \mu_{\text{ср}} = \frac{2m_2 + m_2}{\frac{2m_2}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}} = \frac{3\mu_1\mu_2}{2\mu_2 + \mu_1} = 5\frac{1}{3} \text{ г/моль}.$$

**Ответ:**  $\mu_{\text{ср}} = \frac{3\mu_1\mu_2}{2\mu_2 + \mu_1} = 5\frac{1}{3} \text{ г/моль}.$

**Пример 4. [МФТИ 1998]**

Чему равна масса  $m$  азота, которая содержится в воздухе комнаты объёма  $V = 75 \text{ м}^3$ . Средняя квадратичная скорость молекул азота  $u = 500 \text{ м/с}$ . Считать, что воздух состоит из азота и кислорода. Концентрация молекул азота в 4 раза больше концентрации молекул кислорода. Атмосферное давление  $p = 10^5 \text{ Па}$ .

**Решение:**

Пусть  $\mu$  – молярная масса азота,  $p_1$  – парциальное давление азота,  $p_2$  – парциальное давление кислорода.

По условию задачи воздух – смесь азота и кислорода. По закону Дальтона:  $p = p_1 + p_2$ . Азот и кислород считаем

идеальными газами. Т.к. концентрация азота в 4 раза больше концентрации кислорода, то  $\frac{p_1}{p_2} = 4$ , откуда

$p_1 = \frac{4p}{5}$ . Из уравнения состояния азота:  $p_1 V = \frac{m}{\mu} RT$ , т.е.  $m = \frac{p_1 V \mu}{RT} = \frac{4pV\mu}{5RT}$ . Температуру  $T$  выражаем через

среднюю квадратичную скорость молекул азота  $u = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$ , откуда  $T = \frac{\mu \cdot u^2}{3R}$ .

Следовательно:  $m = \frac{12pV}{5u^2}$ ,  $m \approx 72 \text{ кг}$ .

**Ответ:**  $m = \frac{12pV}{5u^2} \approx 72 \text{ кг}$ .

### Пример 5.

Объём воздушного шара равен  $V = 224 \text{ м}^3$ , масса оболочки  $M = 145 \text{ кг}$ . Шар наполнен горячим воздухом. В нижней части оболочки имеется отверстие, через которое воздух в шаре сообщается с атмосферой. Температура воздуха вне оболочки  $T_0 = 0^\circ \text{C}$ , атмосферное давление  $p_0 = 10^5 \text{ Па}$ . При какой минимальной температуре воздуха внутри оболочки шар начинает подниматься? Молярную массу воздуха принять равной  $\mu = 29 \text{ г/моль}$ .

### Решение:

Пусть  $F_A$  – сила Архимеда, действующая на воздушный шарик. Тогда шарик будет подниматься при условии, что  $F_A \geq (m + M) \cdot g$ , где  $m$  – масса воздуха внутри шарика. Воздух вне и внутри шарика будем считать идеальным газом. В нижней части оболочки имеется отверстие, через которое воздух в шаре сообщается с атмосферой, значит, давление внутри шарика такое же, как и снаружи. Из уравнения состояния для воздуха внутри шарика получаем, что  $m = \frac{p_0 \cdot \mu \cdot V}{R \cdot T}$ . Выразим  $F_A$ . По определению  $F_A = \rho_0 g V$ , где  $\rho_0$  – плотность воздуха вне шарика.

Из уравнения состояния для воздуха вне шарика получаем, что  $\rho_0 = \frac{p_0 \cdot \mu}{R \cdot T_0}$ . Итак,  $F_A = \frac{p_0 \cdot \mu \cdot g \cdot V}{R \cdot T_0}$ ,

следовательно,  $\frac{p_0 \cdot \mu \cdot g \cdot V}{R \cdot T_0} \geq \left( \frac{p_0 \cdot \mu \cdot V}{R \cdot T} + M \right) \cdot g$ , откуда  $T_{\min} = \frac{1}{\frac{1}{T_0} - \frac{MR}{p_0 \mu V}}$ ,  $T_{\min} \approx 553 \text{ K}$ .

**Ответ:**  $T_{\min} = \frac{1}{\frac{1}{T_0} - \frac{MR}{p_0 \mu V}} \approx 553 \text{ K}$ .

### Пример 6. [МФТИ 1994]

В горизонтально расположенной трубке столбиком ртути длиной  $l = 12 \text{ см}$  заперт слой воздуха толщиной  $L = 35 \text{ см}$  (рис.2). Если трубку повернуть один раз открытым концом вниз, а другой раз вверх, то столбик ртути смещается. Разность величин этих смещений от начального горизонтального положения равна  $d = 2 \text{ см}$ . При повороте трубки ртуть из неё не выливается. Найти величину наружного давления (в мм ртутного столба).



рис.2

### Решение:

Обозначим за  $H$  внешнее давление воздуха (в мм рт. ст.). Воздух будем считать идеальным газом, температура которого в нашем опыте не изменяется.

• Повернём трубку открытым концом вниз. Давление газа уменьшится, объём газа увеличится, поэтому столбик ртути должен опуститься. Пусть столбик ртути сместится на  $x_1$ . Тогда по закону Бойля-Мариотта

$\rho g H S L = (\rho g H - \rho g l) S (L + x_1)$ , где  $\rho$  – плотность ртути,  $S$  – площадь поперечного сечения трубки, откуда

$$HL = (H - l)(L + x_1) \text{ и } x_1 = \frac{HL}{(H - l)} - L = \frac{Ll}{(H - l)}.$$

• Повернём трубку открытым концом вверх. Давление газа увеличится, объем газа уменьшится, поэтому столбик ртути должен подняться. Пусть столбик ртути сместится на  $x_2$ . Тогда по закону Бойля-Мариотта

$$\rho g H S L = (\rho g H + \rho g l) S (L - x_2), \text{ откуда } HL = (H + l)(L - x_2) \text{ и } x_2 = L - \frac{HL}{(H + l)} = \frac{Ll}{(H + l)}.$$

По условию  $x_1 - x_2 = d$ . Значит,  $\frac{Ll}{(H - l)} - \frac{Ll}{(H + l)} = d \Rightarrow \frac{2Ll^2}{(H^2 - l^2)} = d \Rightarrow H = l \cdot \sqrt{1 + \frac{2L}{d}}, H = 720 \text{ мм рт. ст.}$

**Ответ:**  $H = l \cdot \sqrt{1 + \frac{2L}{d}} = 720 \text{ мм рт. ст.}$

### Домашнее задание.

**Задача 1.** Сосуд разделён подвижным поршнем на объёмы  $2V/5$  и  $3V/5$ , содержащие идеальный газ температуры  $T = 300 \text{ K}$  (рис.3). Как и насколько нужно изменить температуру газа справа от поршня, чтобы отношение объёмов стало равным? Слева температура газа поддерживается постоянной.

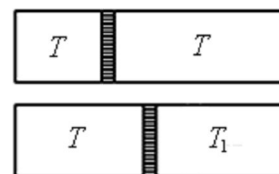


рис.3

**Задача 2. [МФТИ 1997]** Моль гелия нагревается при постоянном объёме  $V_0 = 400 \text{ л}$

так, что относительное увеличение его давления составило  $\alpha = \frac{\Delta p}{p_0} = 0,4\%$ .

- 1) На сколько градусов  $\Delta T$  увеличилась температура газа, если его начальная температура  $T_0 = 500 \text{ K}$  ?
- 2) На сколько атмосфер увеличилось давление газа?

**Задача 3. [МФТИ 2000]** Имеется Г – образная тонкая трубка постоянного внутреннего сечения и общей длиной  $3L=1260 \text{ мм}$ . Между слоем воздуха длиной  $L=420 \text{ мм}$  и атмосферой находится слой ртути той же длины  $L$  (рис.4).

Какой длины слой ртути останется в трубке, если вертикальное колено повернуть на  $180^\circ$ , расположив его открытым концом вниз?

Внешнее давление  $p_0 = 735 \text{ мм рт.ст.}$

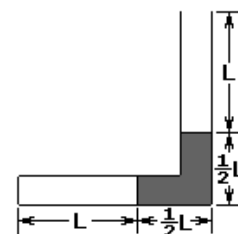


рис.4

**Задача 4.** Сосуд ёмкостью  $2V$  разделён пополам полупроницаемой перегородкой. В одну половину сосуда введён водород массой  $m_B$  и азот массой  $m_A$ , в другой половине вакуум. Через перегородку может диффундировать только водород. Во время процесса температура  $T$  поддерживается постоянной. Какие давление установятся в обеих частях сосуда?

4 ноября 2009 г.

Межвузовский центр воспитания и развития  
 талантливой молодежи в области  
 естественно-математических наук  
 "Физтех-центр"

Составители: Пенкин М.А., Шувалов Н.Д.

E-mail: [abitu@phystech.edu](mailto:abitu@phystech.edu), [fmicky@gmail.com](mailto:fmicky@gmail.com)

Сайт: [www.abitu.ru](http://www.abitu.ru)